Chiacchierata
sul calcolo infinitesimale:
la derivata di una funzione

Sandro Salsa, febbraio 2011

1. Due problemi di ottimizzazione

2. Alcune questioni scientifiche nel XVII secolo

3. Origini e sviluppo del calcolo infinitesimale

la nascita, la diffusione, le critiche, i successi

4. Il calcolo differenziale moderno

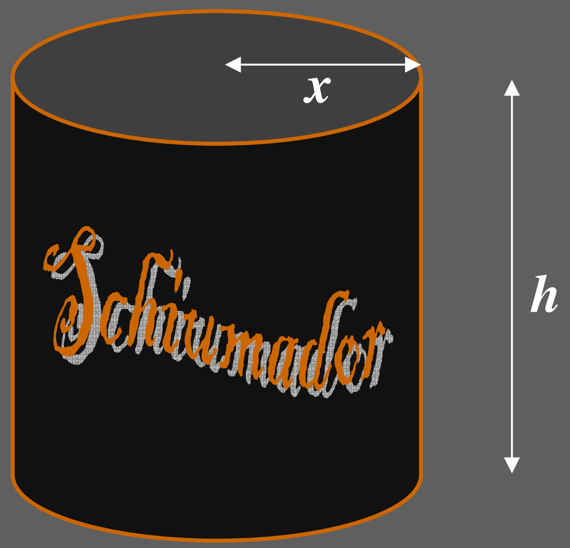
limite e derivata, regole di calcolo, massimi e minimi

5. Soluzione dei problemi di ottimizzazione

1. Due problemi di ottimizzazione

La lattina più economica

La fabbrica di birra SCHIUMADOR vuole risparmiare sul costo delle lattine usando lo stesso materiale, conservando la forma cilindrica e il volume *V* (33 cl).

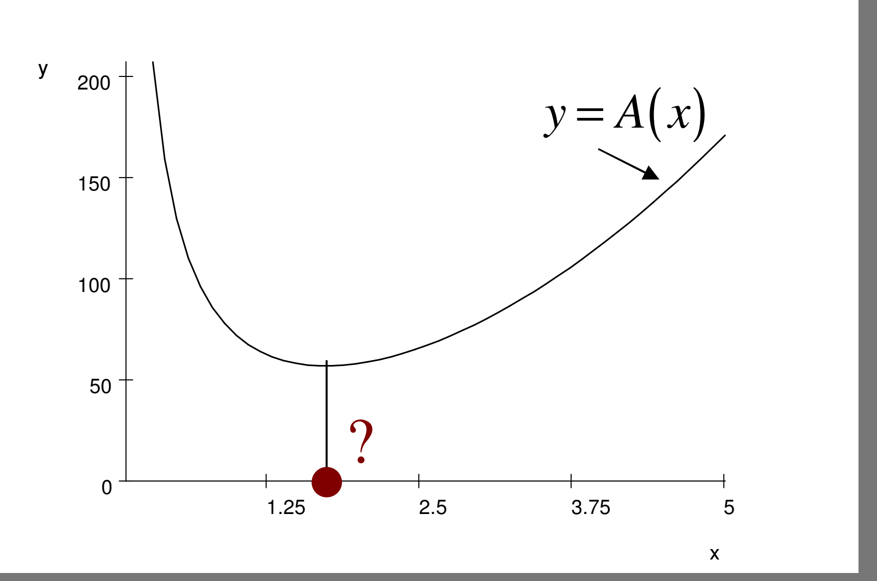


Problema: ***come scegliere altezza (h cm) e raggio (x cm) in modo che la superficie totale sia minima?***

$$A(x) = \text{area totale} = \underbrace{2\pi x^2}_{\text{area dei cerchi di base}} + \underbrace{2\pi hx}_{\text{area della superficie laterale}}$$

$$V = \pi h x^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi x^2}$$

$$A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

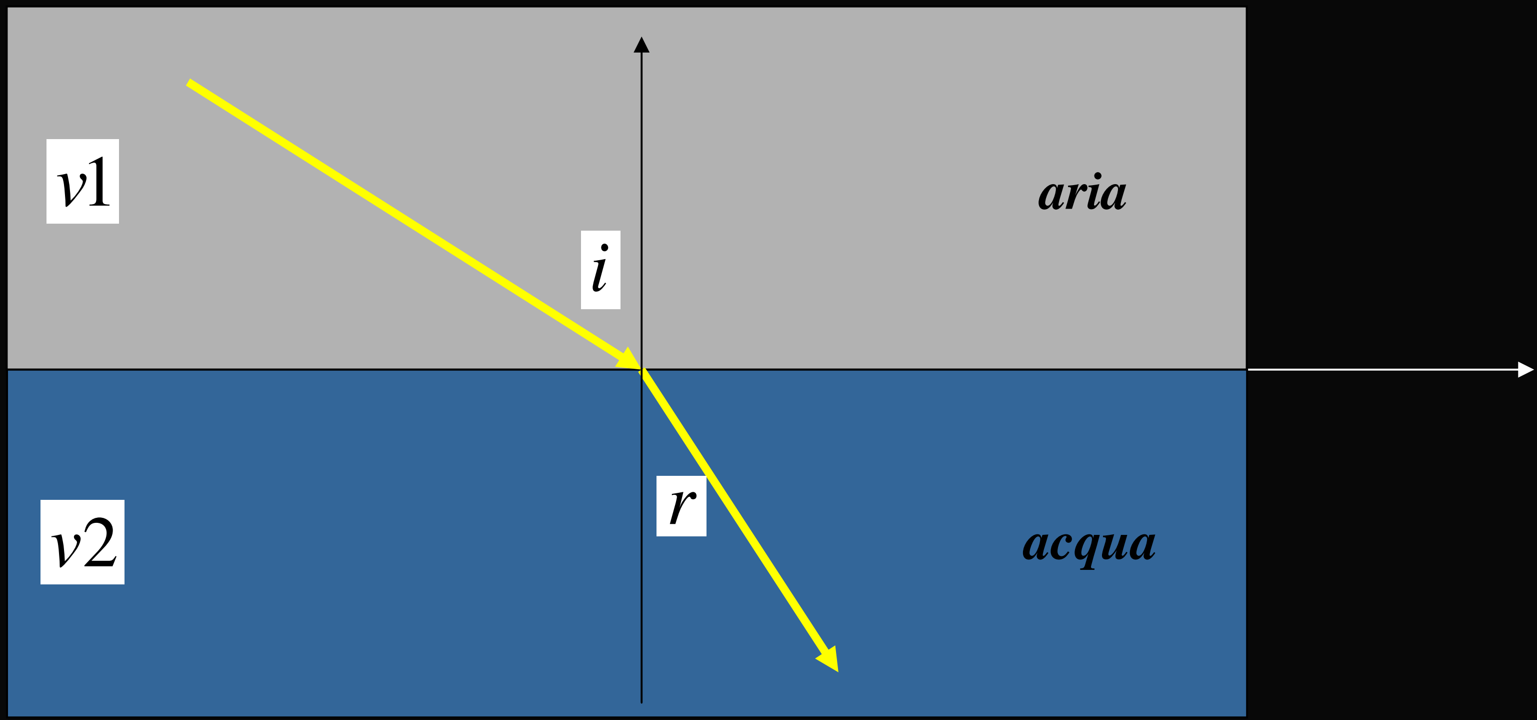


t
e
:

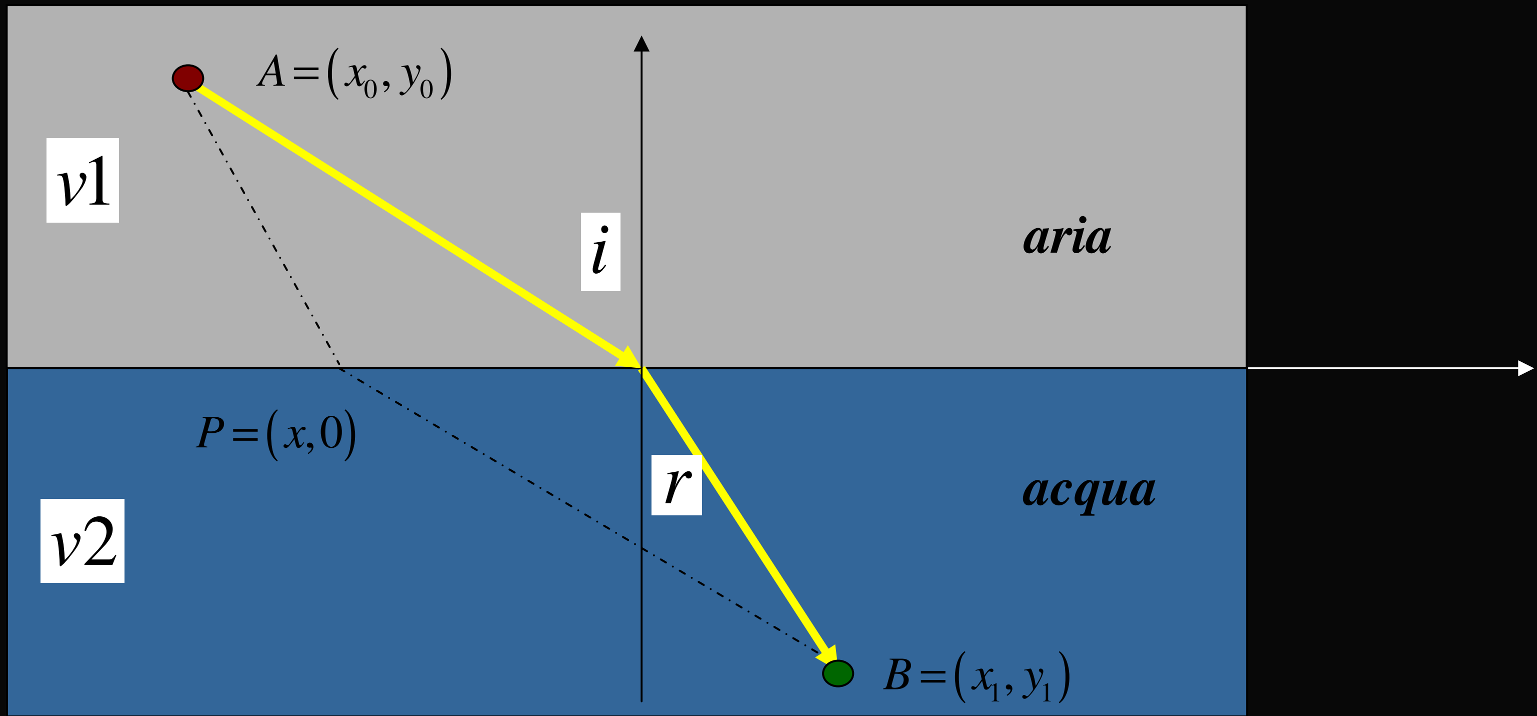
m
m
o

Rifrazione della luce

Un segnale luminoso passa attraverso due mezzi omogenei (*aria-acqua*), separati da una superficie piana.



Problema: ***che relazione sussiste tra gli angoli i,r e le velocità v1 e v2?***



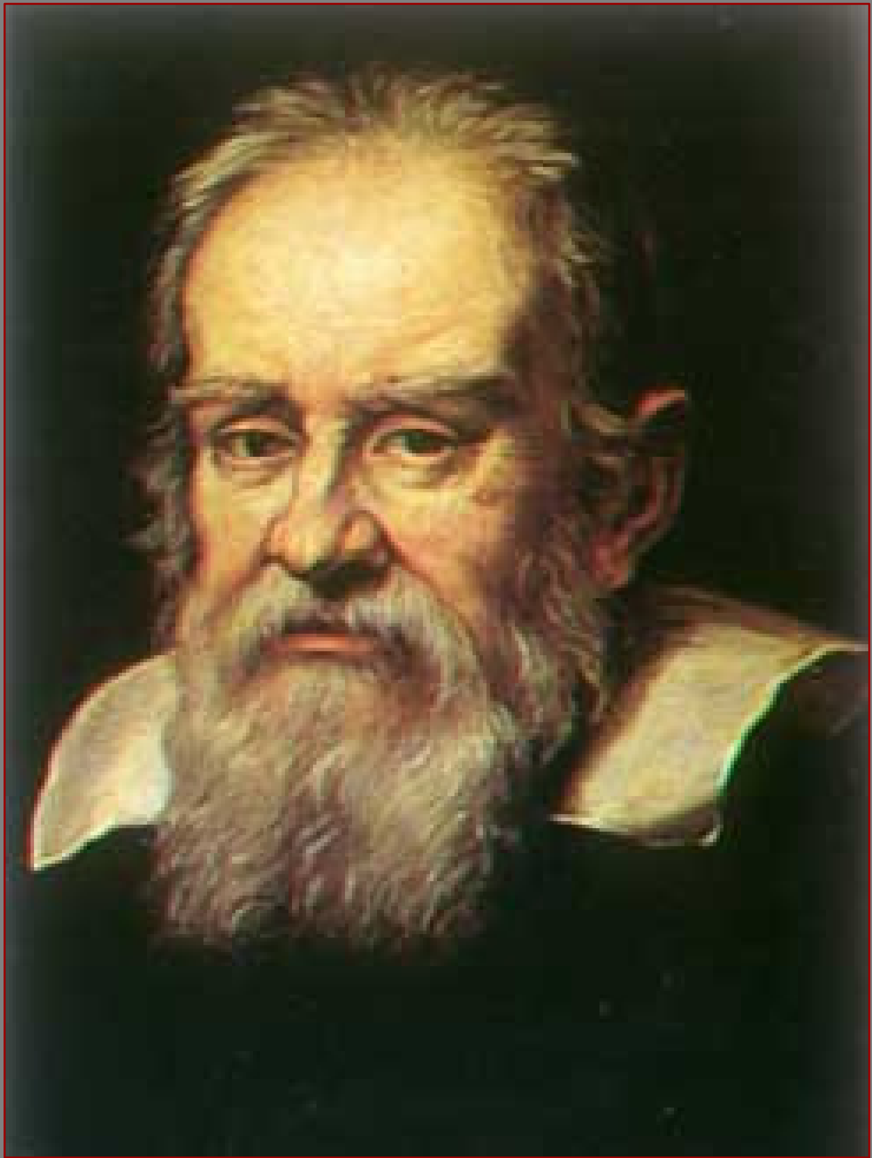
Il segnale minimizza il tempo di percorrenza da A a B

1. Alcune questioni scientifiche nel XVII secolo

cinematiche:

che cosa si intende per velocità ed accelerazione
di un oggetto in moto ?

Moto rettilineo uniforme: ***velocità = spazio / tempo***
Velocità media



Galileo Galilei

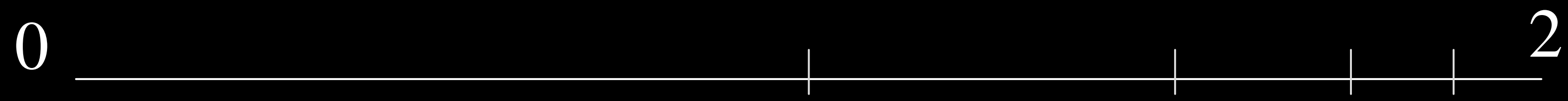
N: 15 Feb 1564 a Pisa
M: 8 Gen. 1642 ad Arcetri

analitiche:

Ha senso sommare infiniti termini?

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$ serie geometrica di ragione q: q?

$$q=\frac{1}{2}\ \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$



Pseudo-teologiche! Guido Grandi (1671-1742)

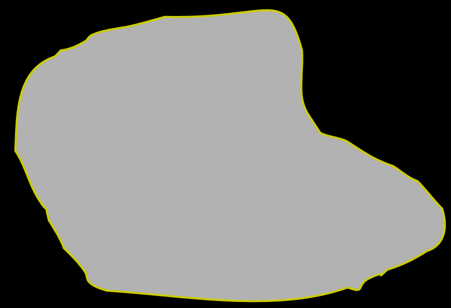
$$1-1+1-1+\ldots\ =0+0+0+0+\ldots\ =\frac{1}{2}$$

?!

geometriche/meccaniche:

come si calcolano aree e volumi di

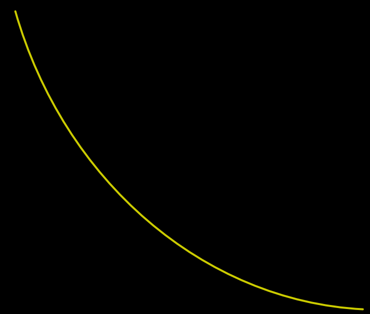
figure piane o di solidi generici ?



come si calcola la lunghezza, per

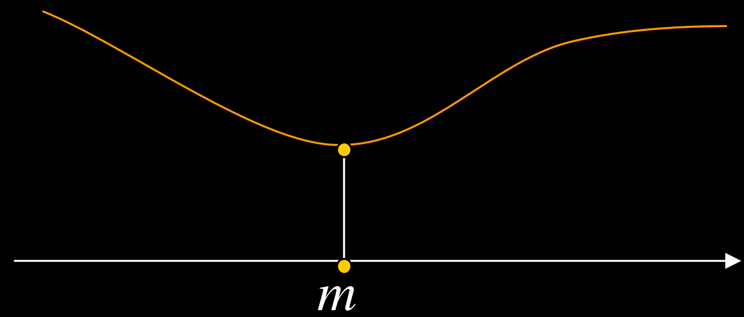
esempio, di un arco di parabola?

(rettificazione di curve “meccaniche”)

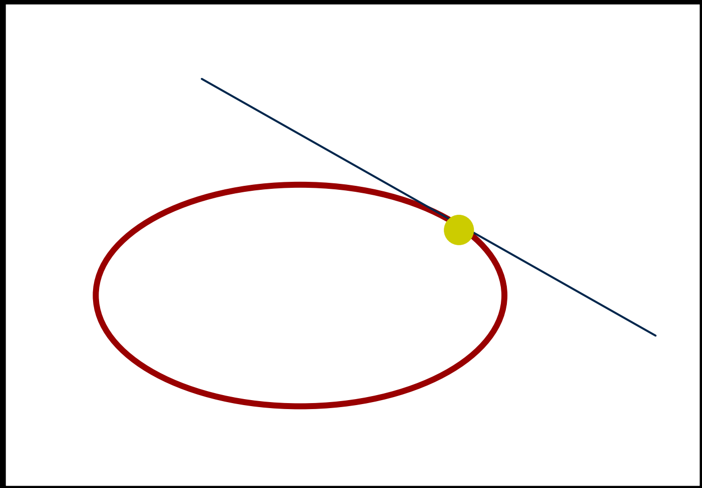


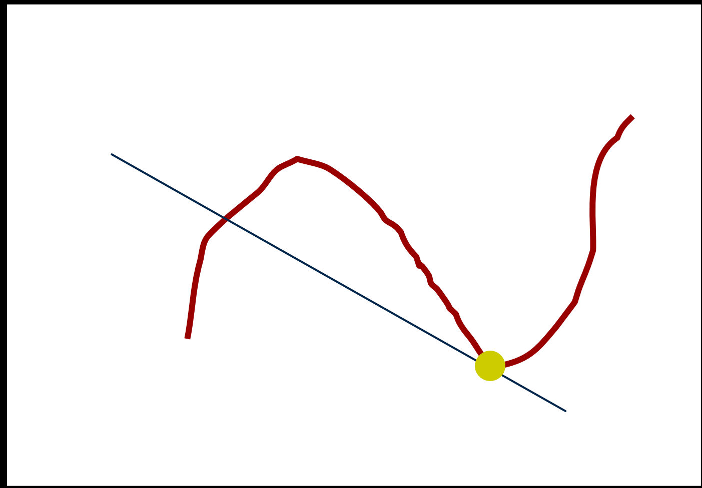
come si determina la quota massima

o minima di una linea?

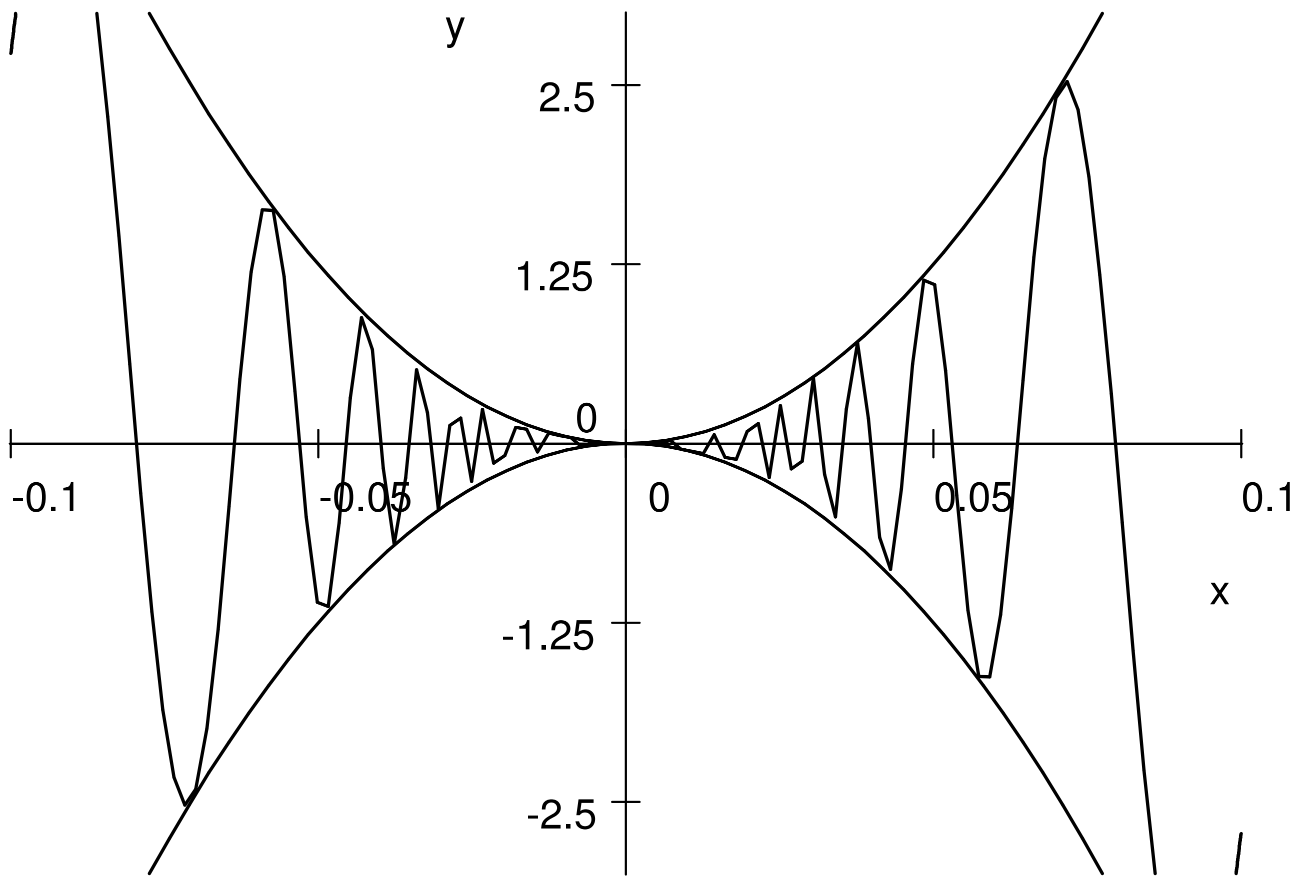


che cosa si intende per *retta tangente* ad una linea piana in un suo punto?





non ben definiti i concetti di numero reale e di funzione!!



y
2.5
1.25
0
-1.25
-2.5
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
x

2. Origini e sviluppo del calcolo infinitesimale

la nascita

la diffusione

le critiche

i successi

Bonaventura Francesco Cavalieri

Metodo degli indivisibili per calcolare aree e volumi (1626)
Area come "somma di linee parallele
-gli indivisibili-
di dimensioni infinitesime"

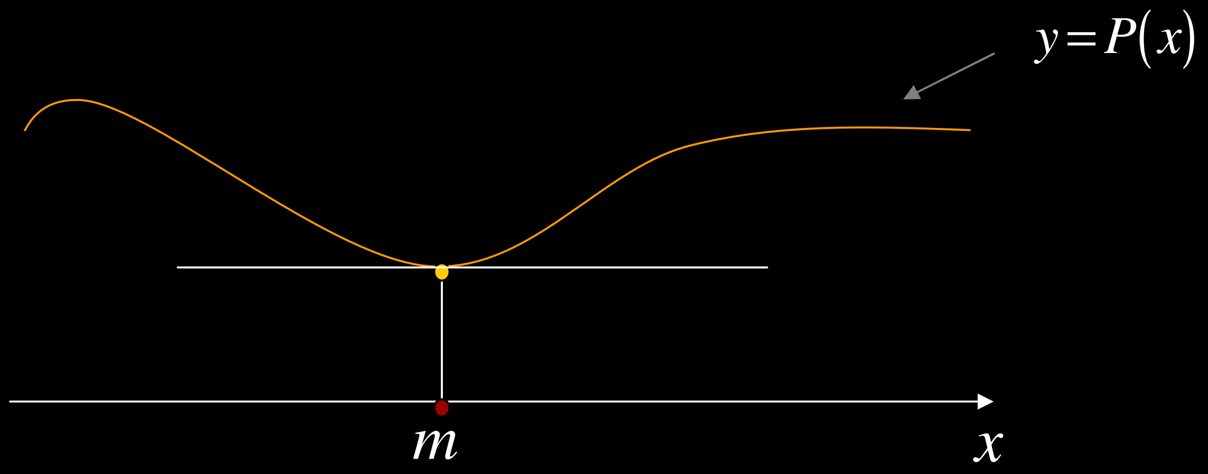
N: 1598 a Milano
M: 30 Nov 1647 a Bologna

Pierre de Fermat

N: 17 Ago 1601 a Beaumont-de-Lomagne, Francia
M: 12 Gen 1665 a Castres, Francia

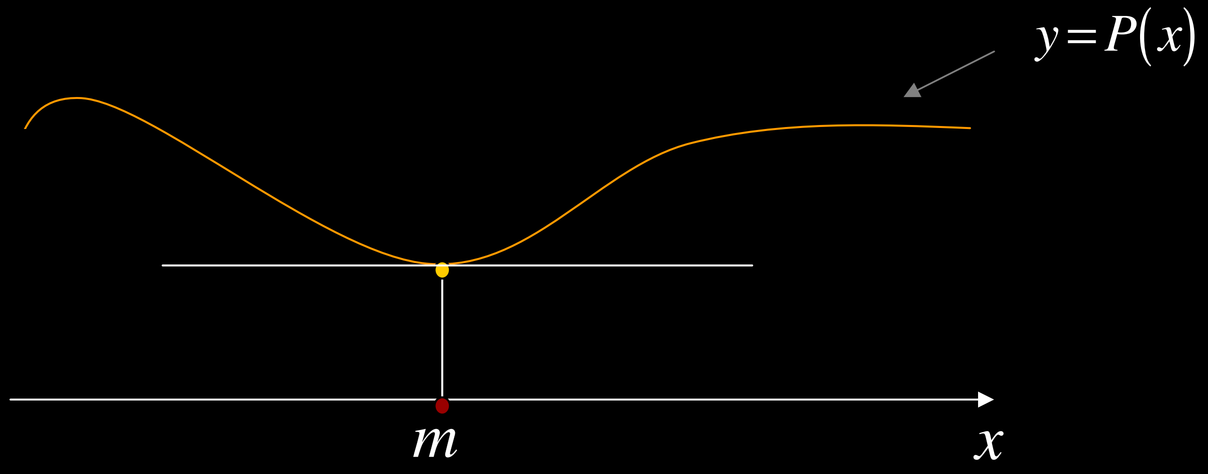
Laplace *"Fermat, il vero inventore del calcolo differenziale"*

metodo per trovare max e min di "luoghi" geometrici descritti da polinomi



Come si trova *m?*

Nel punto di ascissa *m* la tangente alla curva è orizzontale!



incremento della variabile x

da m passo a $m+dm$

incremento della variabile y

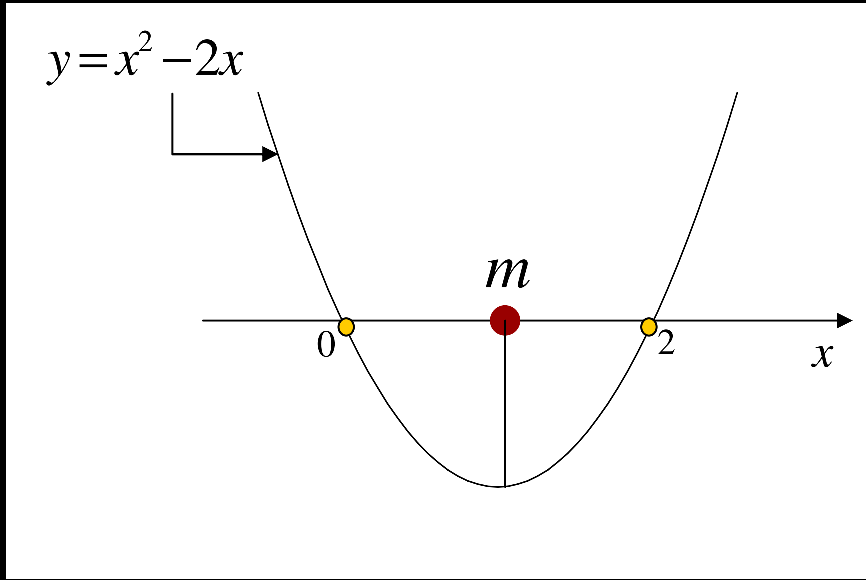
$$P(m+dm)-P(m)=0$$

rapporto incrementale

$$\frac{P(m+dm)-P(m)}{dm}=0$$

$dm=0$!!!

Funziona?



$$P(m+dm) - P(m) = \left[(m+dm)^2 - 2(m+dm)\right] - (m^2 - 2m)$$

$$= \left[\left(m^2 + 2mdm + (dm)^2\right) - (2m + 2dm)\right] - (m^2 - 2m)$$

$$= m^2 + 2mdm + (dm)^2 - 2m - 2dm - m^2 + 2m$$

$$= 2mdm + (dm)^2 - 2dm$$

$$\frac{P(m+dm)-P(m)}{dm}=0 \text{ diventa}$$

$$\frac{2m\,dm+(dm)^2-2\,dm}{dm}=2m-2+dm=0$$

$$\boxed{dm=0 \Rightarrow 2m-2=0 \Rightarrow m=1}$$

Funziona!! Ma per linee più generali?

Che cosa si intende per *retta tangente* ad una linea piana ?

Come si definisce il concetto di velocità istantanea?

Sir Isaac Newton

N: 4 Gen 1643 a Woolsthorpe, Lincolnshire, Inghilterra
M: 31 Marzo 1727 a Londra

Newton Sviluppo legato a problemi cinematici

fluenti e flussioni

grandezze geometriche/fisiche variabili in dipendenza del tempo

$$\boxed{y, x}$$

velocità di variazione delle fluenti

$$\boxed{\dot{y}, \dot{x}}$$

o : incremento temporale "molto piccolo", diverso da zero

Flussione di *y*: ***rapporto tra l'incremento subito da y in un intervallo di tempo o ed o stesso*** *(rapporti tra quantità evanescenti)*

variazioni subite dalle fluenti *x,y*: $\boxed{y + \dot{y}o, x + \dot{x}o}$

Data la relazione tra due fluenti x, y

trovare la relazione tra le loro flussioni $\dot{x}$, $\dot{y}$.

$$y = x^2$$

$$y + \dot{y}o,\ x + \dot{x}o \Rightarrow$$

$$\cancel{y} + \dot{y}\cancel{o} = (x + \dot{x}o)^2 = \cancel{x^2} + 2x\dot{x}\cancel{o} + \dot{x}^2 \cancel{o^2}$$

$$o = 0 \quad (!!)$$

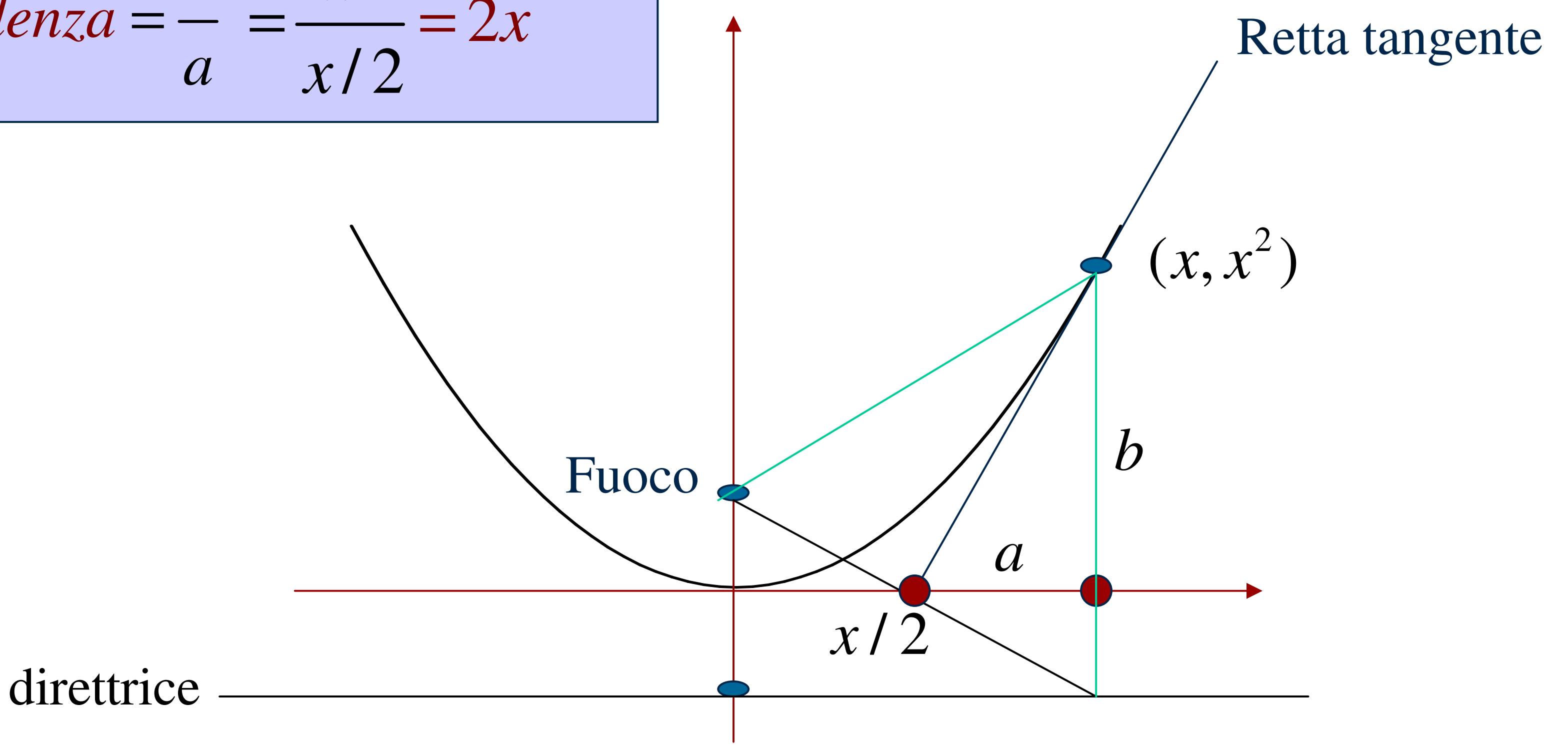
$$\boxed{\dot{y} = 2x\dot{x}}$$

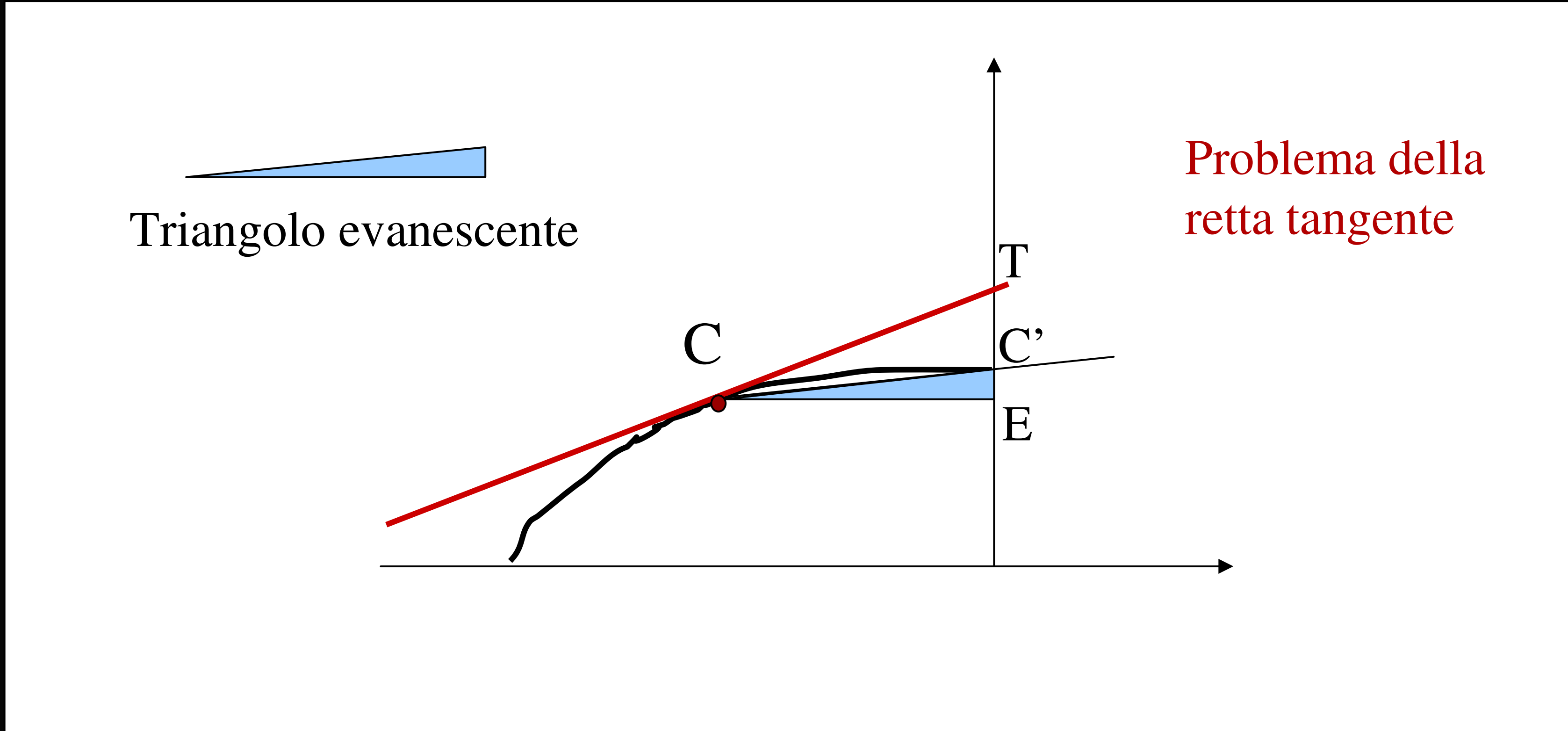
$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$ derivata di y rispetto ad x

$2x$ derivata di x^2 rispetto ad x

Che cosa rappresenta?

$$pendenza = \frac{b}{a} = \frac{x^2}{x/2} = 2x$$





" il triangolo evanescente CEC' nell'ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET….affinché si trovino le ragioni ultime delle linee CE, CC' e C'E, i punti C e C' devono sovrapporsi e coincidere …

c'è già il concetto di limite….

Gottfried Wilhelm von Leibniz

N: 1 Luglio 1646 a Lipsia, Sassonia (Germania)
M: 14 Nov. 1716 a Hannover, Hannover (Germania)

Leibniz Infinitesimi attuali, differenziali

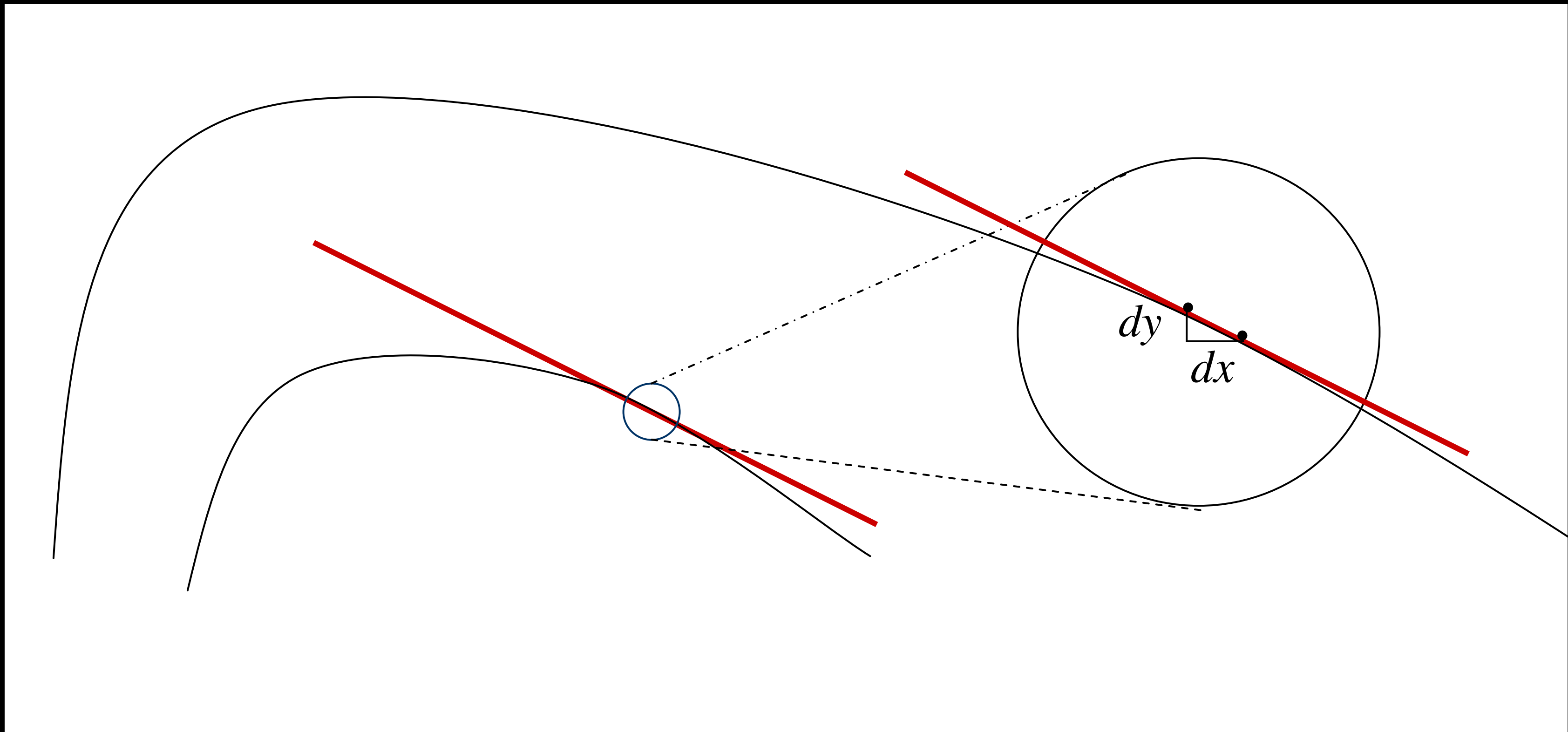
Infinitesimo (positivo): *numero positivo più piccolo di ogni numero del tipo 1/n*

$$esempio: \ \varepsilon = 1 - 0.999999....$$

Differenziali: ***dy e dx incrementi infinitesimi***

$$dx = \varepsilon, \ dy = f\left(x + \varepsilon\right) - f\left(x\right)$$

Trovare la tangente significa condurre una retta che congiunga due punti aventi distanza infinitamente piccola…quella distanza infinitamente piccola è sempre nota per mezzo di qualche differenziale dx, dy….



Derivata come rapporto dei differenziali ***dy e dx***

$$\frac{dy}{dx} \text{ : pendenza della retta tangente}$$

$$esempio: \text{ derivata di } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon \text{ "=" } 2x$$

regole di calcolo, relazione tra integrazione e derivazione

Acta Eruditorum (1684), Lipsia: **annuncio della nascita del calcolo infinitesimale!**

2. Origini e siluppo del Calcolo infinitesimale

la nascita

la diffusione

le critiche

i successi

Primo trattato sul calcolo infinitesimale alla Leibniz

Analyse des infinitements petits (1696)

***Best seller** !!*

Ancora non ben definiti i concetti di numero reale e di funzione!!

Guillaume Francois de l'Hospital
(1661-1704)

2. Calcolo differenziale (ed integrale):

la nascita

la diffusione

le critiche

i successi

George Berkeley
(1684-1753)

… che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti. E cosa sono questi incrementi evanescenti? Non sono quantità finite, né quantità infinitamente piccole e neppure nulla. Non possiamo chiamarli fantasmi di quantità scomparse?

2. Origini e sviluppo del calcolo infinitesimale

la nascita

la diffusione

le critiche

i successi

meccanica, meccanica celeste

vibrazioni di una corda,

propagazione del suono

attrazione gravitazionale,

moto dei pianeti, della luna,

equazioni dell'idrodinamica,

propagazione del calore …

principi variazionali

Jean Le Rond d'Alembert

Corda vibrante
e propagazione del suono

1749, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*

N: 17 Nov. 1717 a Parigi
M: 29 Ott. 1783 a Parigi

Leonhard Euler

880 scritti,
88 volumi dell' ***opera omnia***

dinamica del corpo materiale, fluidodinamica, elasticità, ….

N: 15 Aprile 1707 a Basilea
M: 18 Sett. 1783 a S. Pietroburgo, Russia

Eulero. Con Gauss e Riemann uno dei più grandi. I suoi scritti erano un modello di chiarezza. Non sintetizzava mai. Cieco negli ultimi 17 anni della sua vita. Sapeva l’Eneide a memoria. La sua vita fu placida e serena … con 13 figli.

Introductio in Analysin infinitorum (1748)

Institutiones Calculi Differentialis (1755)

Institutiones Calculi Integrali (1768-1794)

Le notazioni di sin x, cos x, f(x) e il simbolo di sommatoria sono dovute a lui.

Ad Eulero si devono le equazioni di moto per la rotazione di un solido, quella per la flessione di una barra e la nozione di carico critico per la compressione di una colonna.

Predisse il fenomeno della pressione di radiazione, cruciale in teoria della stabilità stellare.

Johann Bernoulli: **Eulero principe dei matematici**

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

funzione (1755): *Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano variazioni, esse si usano chiamare **funzioni** di queste.*
Questa denominazione ha un'estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi con i quali una quantità si può determinare per mezzo di altre.

Pierre-Simon Laplace

Meccanica celeste

Mécanique Céleste,
5 volumi dal 1799 al 1825

N: 23 Marzo 1749 a Beaumont-en-Auge, Normandia
M: 5 Marzo 1827 a Parigi

Laplace. Matematico e astronomo. Interessi: meccanica celeste, probabilità, carriera personale.
Noto ai suoi tempi come il Newton di Francia, era impegnato ad applicare la teoria di N. al sistema solare facendo interagire anche pianeti e satelliti fra loro.
Nei suoi volumi sulla meccanica celeste non aveva citato nessuno.

Napoleone voleva provocarlo chiedendogli come mai avesse scritto un libro tanto importante senza menzionare Dio come autore dell'universo.
Laplace rispose che non aveva bisogno di quell'ipotesi.

Dopo la rivoluzione sviluppò il suo talento politico. Ad ogni cambio di regime si adattava cambiando da fervente repubblicano a fervente monarchico. Ogni volta con una posizione migliore.

Generoso nell'incoraggiamento/aiuto ai giovani. Aiutò il chimico Gay-Lussac, il naturalista Humboldt e il giovane Cauchy.

Jean Baptiste Joseph Fourier

Propagazione del calore

1822, *Théorie analytique de la Chaleur*

N: 21 Marzo 1768 a Auxerre, Francia
M: 16 Maggio 1830 a Parigi

Principi variazionali

Erone d'Alessandria, I secolo d.C.: *la luce si muove lungo un percorso che minimizza tempo e spazio*.

Leonardo: *la natura è economica.*

Pierre de Fermat: *la luce viaggia da un punto ad un altro lungo il cammino che richiede il tempo minimo*

Jacob

Bernoulli brothers

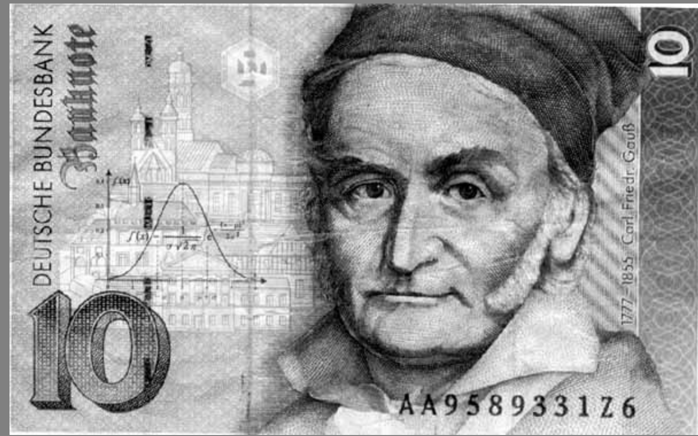
Johann

N: 27 Dic 1654 a Basilea
M: 16 Ago 1705 aBasilea

N: 27 Lug 1667 a Basilea
DM: 1 Gen 1748 a Basel,

Joseph Louis Lagrange

N: 25 Gen 1736 a Torino
M: 10 Aprile 1813 a Parigi



Johann Carl Friedrich Gauss

N: 30 Aprile 1777 a Brunswick (Germania)
M: 23 Feb 1855 a Göttingen, Hannover (Germania)

Goethe: scrisse e diresse piccole commedie a 6 anni
Mozart: compose il primo minuetto a 5 anni
Gauss: a tre anni corresse un errore contabile di suo padre

Geometria differenziale (1820, mappa topografica del regno)

1827: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*

Geometria Rimanniana

Calcolo differenziale assoluto

Relatività generale

3. Calcolo differenziale moderno:

limite e derivata

il calcolo differenziale

massimi e minimi

Augustin Louis Cauchy

N: 21 Ago 1789 a Parigi
M: 23 Maggio 1857 a Sceaux (Parigi)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

1872:

definizione moderna di limite

(definizione epsilon-delta)

N: 31 Ott 1815 a Ostenfelde (Germania)
M: 19 Feb 1897 a Berlino, Germania

Cours d'Analyse (1821) ***nascita della nozione di limite***

"Allorchè i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, sì da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il *limite* di quella variabile."

L è il limite della "variabile" $f(x)$ per x che tende a c:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Differenza prestabilita

$$1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{100}$$

$$1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{1000}$$

$$1-\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{10000}$$

x	0.5	0.3	0.2	0.05	0.01
$\frac{\sin x}{x}$	0.958	0.985	0.993	0.00058	0.99998
$1-\frac{\sin x}{x}$	0.042	0.015	0.007 <1/100	0.00042 <1/1000	0.00002 <1/10000

La derivata!

Sia f definita in un intervallo (a,b). Vogliamo definire la derivata di f in un punto x, a < x < b.

Si calcola l'incremento subito da f quando il suo argomento passa da x a x+h:

$$f(x+h) - f(x)$$

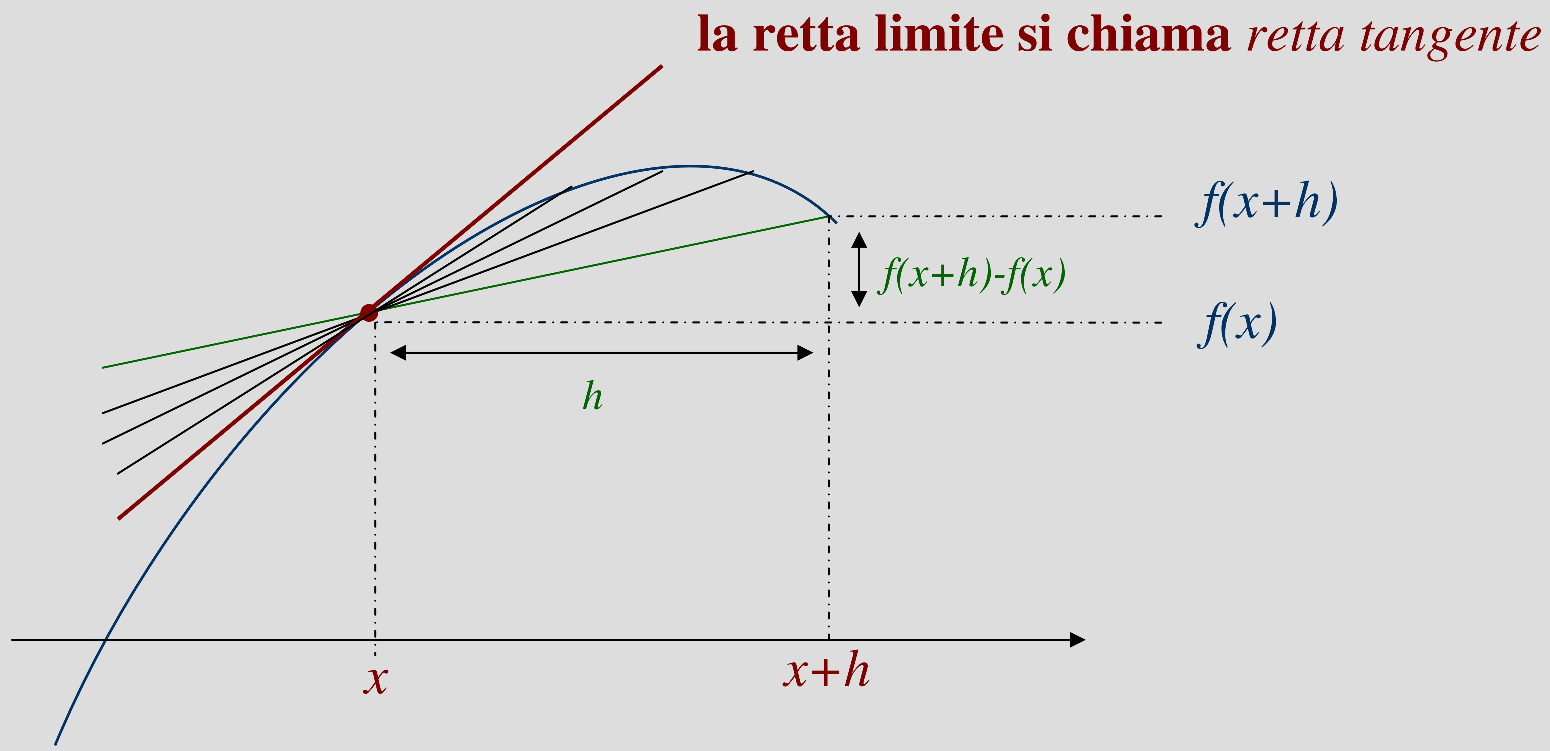
Si definisce **derivata di *f* nel punto *x*** *il seguente limite*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

che si denota con uno dei simboli

$$f'(x) \text{ oppure } \frac{df}{dx}$$

Retta tangente e significato geometrico di f'(x)



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = pendenza\ corda$$

$$f'(x) = pendenza \text{ retta limite}$$

3. Calcolo differenziale moderno:

limite e derivata

il calcolo differenziale

massimi e minimi

$esempio$: derivata di $f(x) = mx + q$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h} = m$$

$f'(x) = m$

$esempio$: derivata di $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

$f'(x) = 2x$

$esempio$: derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Regole di derivazione

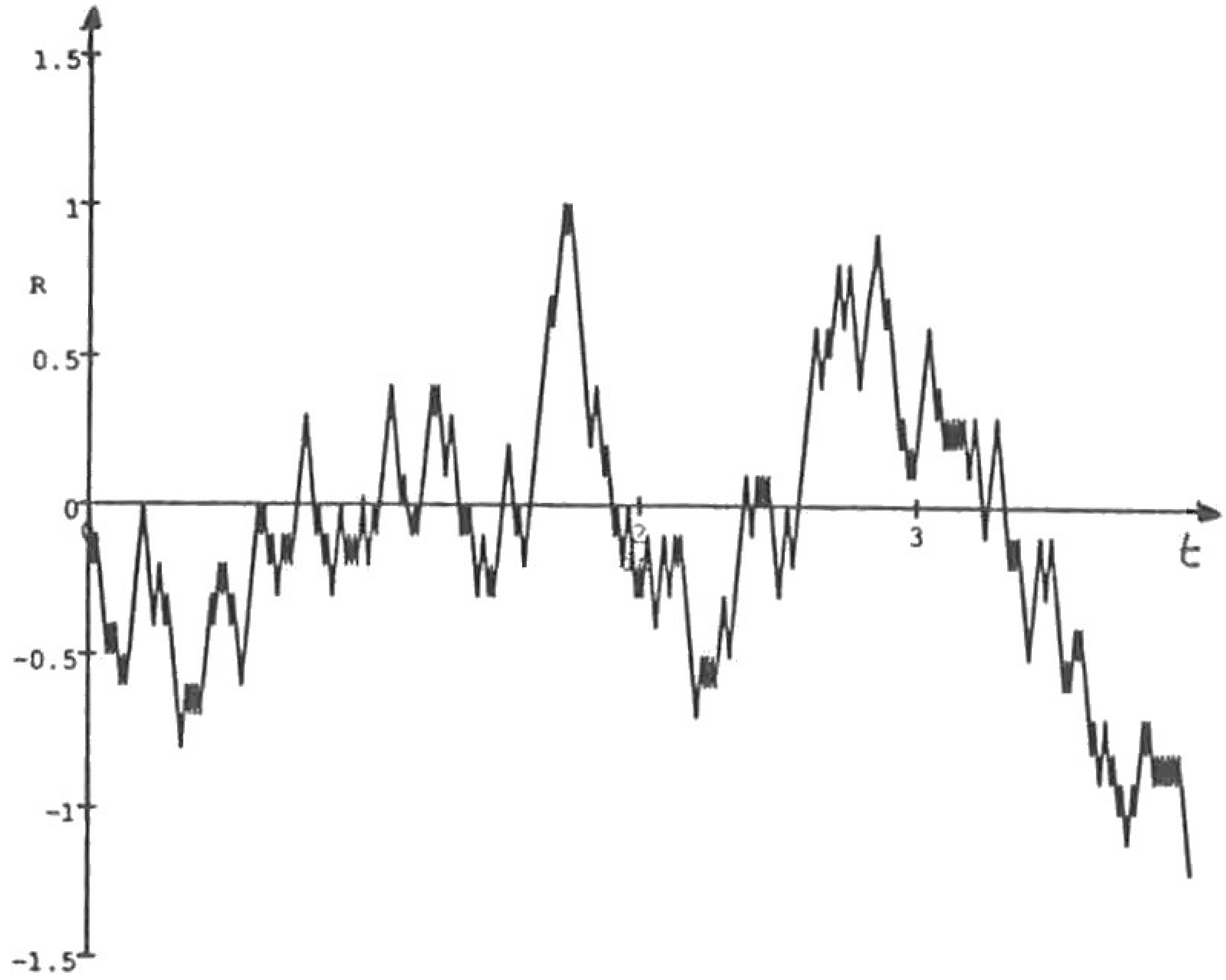
Derivata di una somma:

$$\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$$

Derivata di un prodotto

$$\left[f(x)g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[kg(x)\right]'=kf'(x)$$



1.5
1
R
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
3
t

3. Calcolo differenziale moderno:

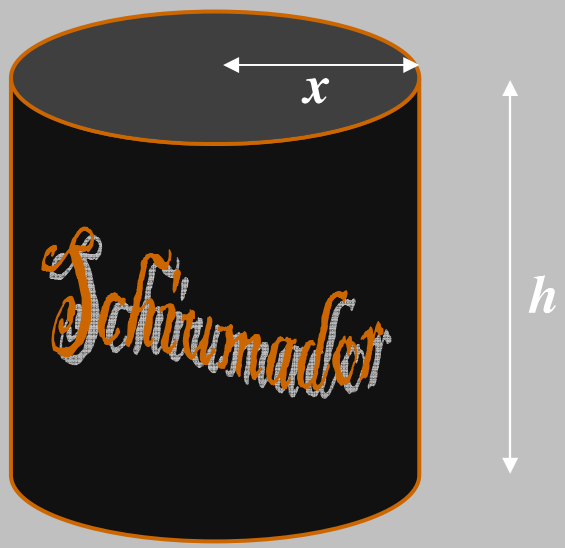
limite e derivata

il calcolo differenziale

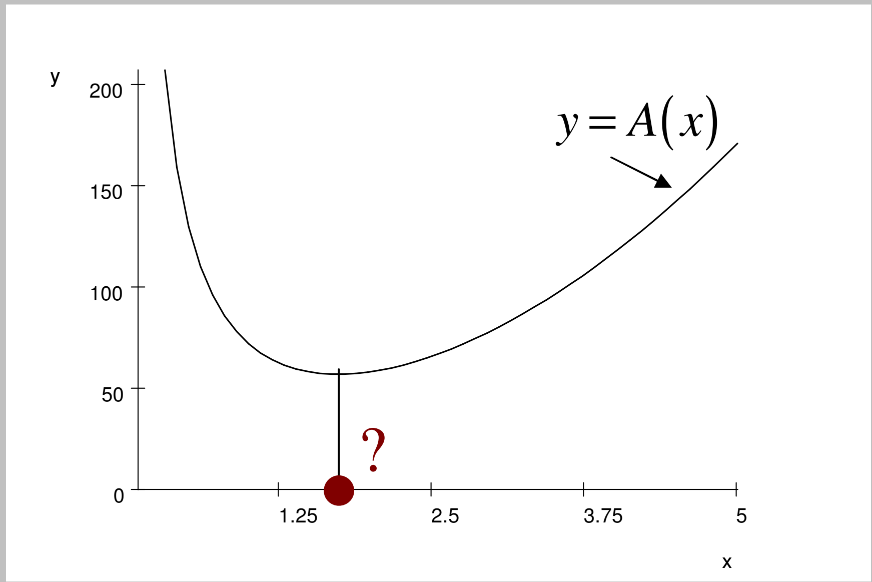
massimi e minimi

La lattina più economica

Problema: ***scegliere altezza (h cm) e raggio (x cm) in modo che la superficie totale sia minima***



$$A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$



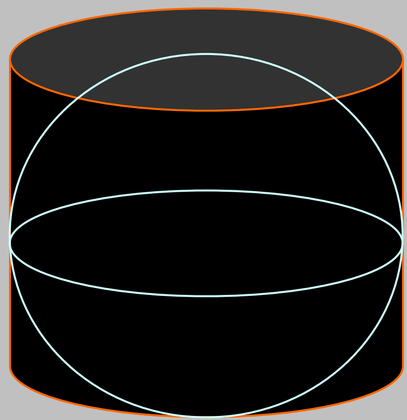
Procedura (Fermat!): nel punto di minimo la tangente al grafico è orizzontale, quindi ha pendenza zero.

Si calcola allora la derivata di A e la si uguaglia a zero.

$$A'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

$$2\pi x^3 = V \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{2\pi}{V}\right)^{2/3} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x$$

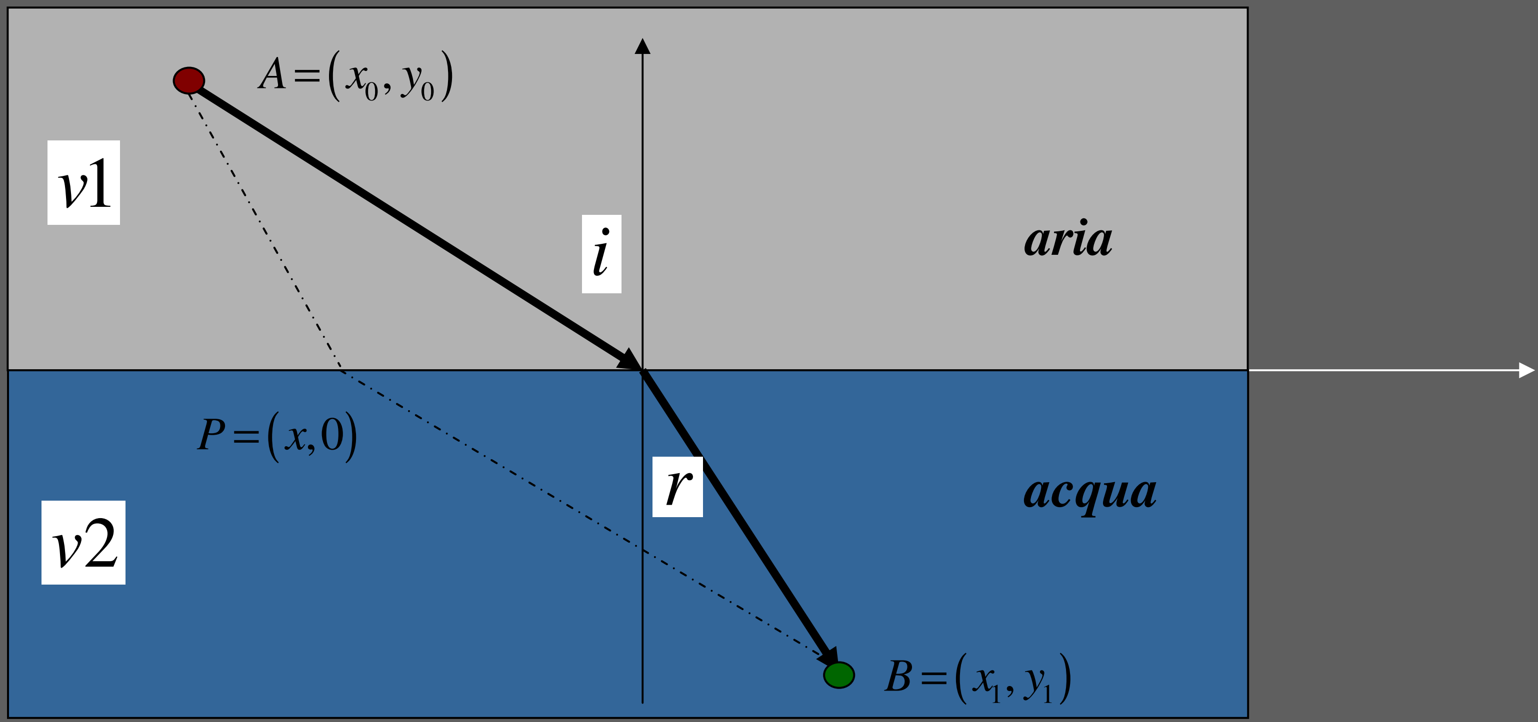


$$V = 330\ cm^3$$

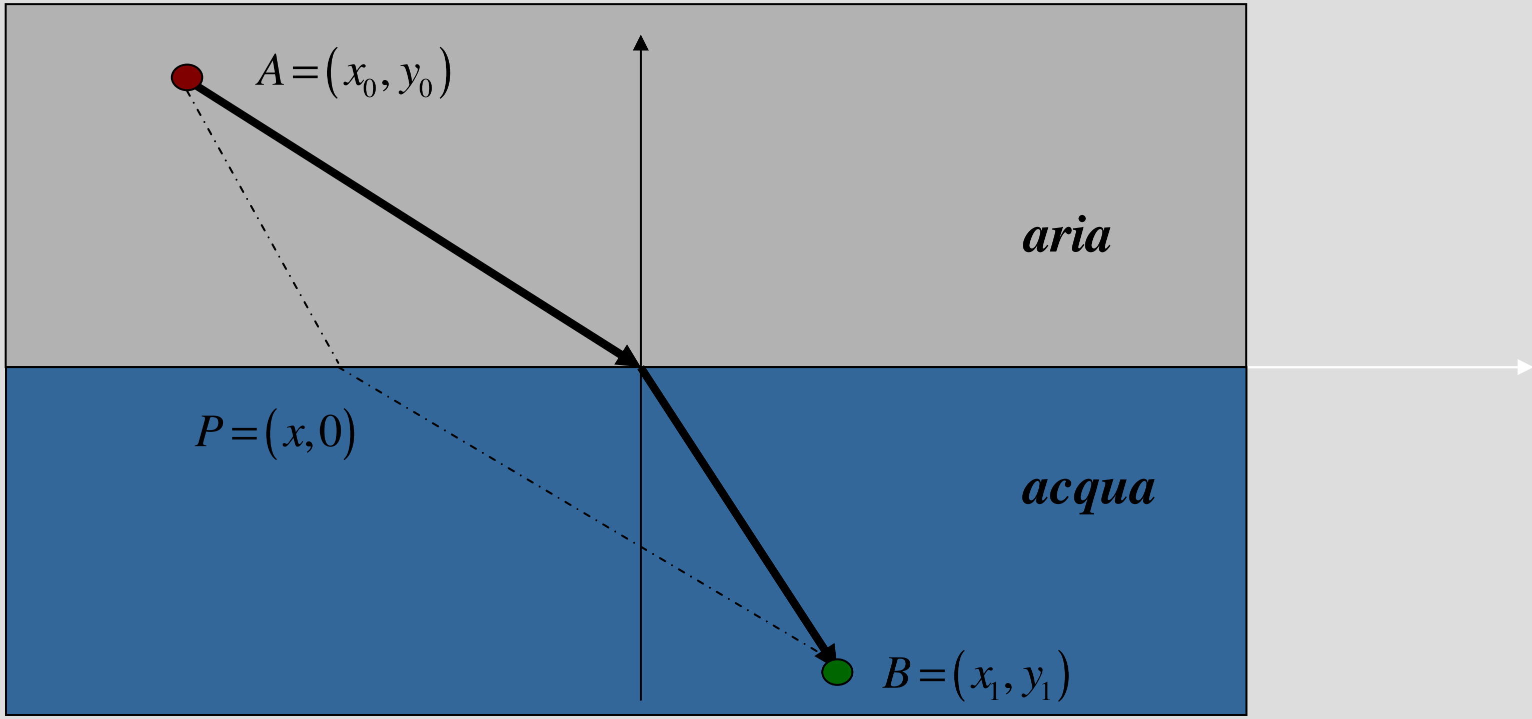
$$h = 2x = 7.48$$

Rifrazione della luce

Problema: ***che relazione sussiste tra gli angoli i,r e le velocità v1 e v2?***



Il segnale minimizza il tempo di percorrenza da A a B



$$T(x)=T_{AP}\ \text{da } A \text{ a } P\ +\ T_{PB}\ \text{da } P \text{ a } B$$

$$T_{AP}=\frac{\text{distanza } AP}{v1}=\frac{1}{v1}\sqrt{(x-x_0)^2+y_0{}^2} \qquad T_{PB}=\frac{\text{distanza } PB}{v2}=\frac{1}{v2}\sqrt{(x-x_1)^2+y_1{}^2}$$

$$T(x)=\frac{1}{v1}\sqrt{(x-x_0)^2+y_0{}^2}+\frac{1}{v2}\sqrt{(x-x_1)^2+y_1{}^2}$$

$$f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}$$

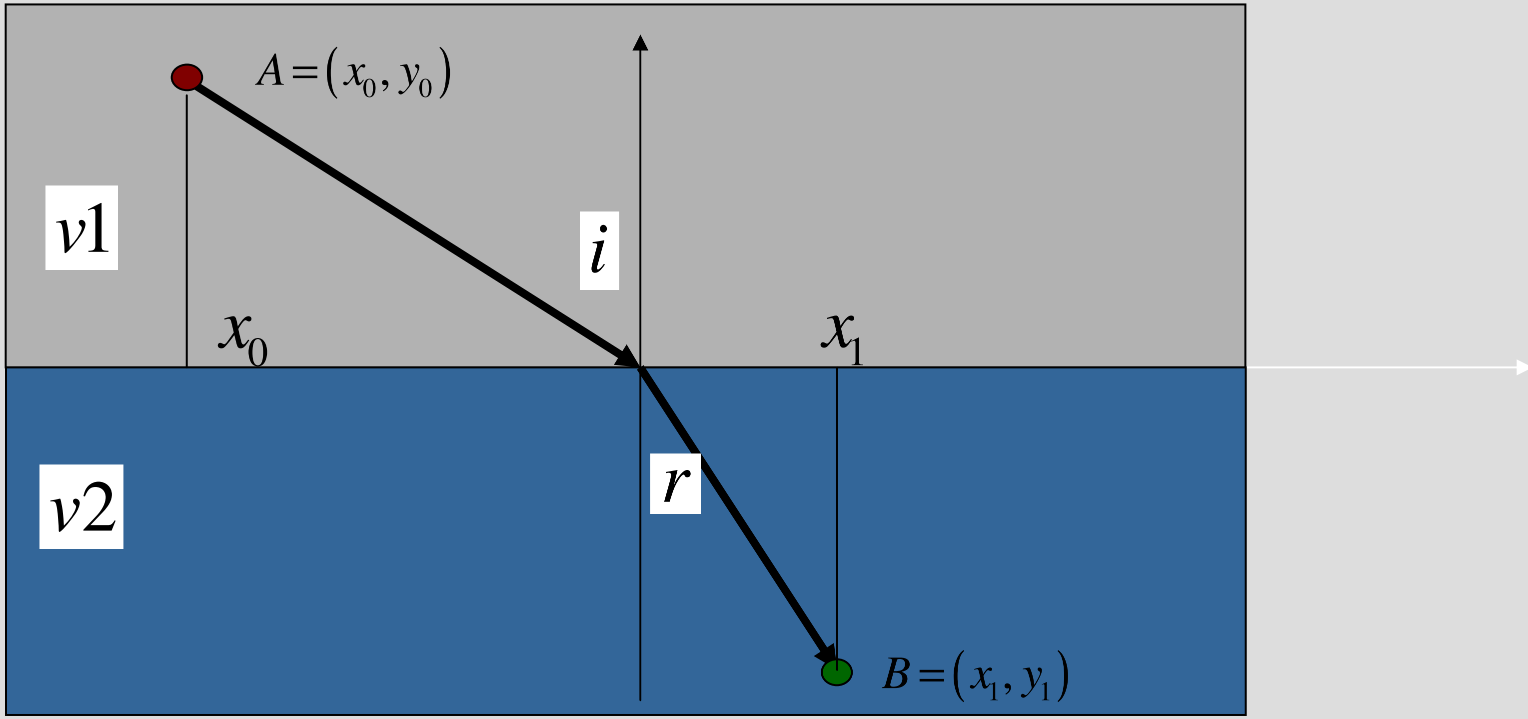
$$f'(x)=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

$$T'(0)=0$$

$$T'(x)=\frac{1}{v1}\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y_0{}^2}}+\frac{1}{v2}\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1{}^2}}$$

$$T'(0)=\frac{1}{v1}\frac{-x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}+\frac{1}{v2}\frac{-x_1}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=0$$

$$\frac{-x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}=\sin i \quad \text{e} \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=\sin r$$



$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v1}{v2}}$$

Legge di Snell **per la rifrazione della luce**